

## Chapitre ...

### Équations

#### Le cours

**Avant-propos :** une équation est une question. Exemple : résoudre dans  $\mathbb{N}$  l'équation  $x^2 - x = 1$ , c'est poser la question : « existe-t-il des entiers positifs  $x$  tels que la différence  $x^2 - x$  soit égale à 1 ? ».

## 1. Produit nul

### Propriété

Soient  $A, B \in \mathbb{R}$ .

Alors  $AB = 0$  équivaut à  $A = 0$  ou  $B = 0$ .

**Exemple.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $4x^2 + 3x = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Dans } \mathbb{R}, \quad & 4x^2 + 3x = 0 \\ & \Leftrightarrow x(4x + 3) = 0 \\ & \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4x + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

L'**ensemble des solutions** est noté  $\mathcal{S} = \left\{ 0; -\frac{3}{4} \right\}$ .

**Remarque.** On retiendra la propriété suivante :

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

## 2. Équation de la forme $x^2 = a$ , avec $a > 0$

### Propriété

Soit  $a$  un réel strictement positif.

Alors l'équation  $x^2 = a$  admet deux solutions dans  $\mathbb{R}$  :  $\sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$ .

*Preuve.* L'équation  $x^2 = a$  équivaut à  $x^2 - a = 0$ .

$$\begin{aligned} & x^2 - a = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0 && \text{car } (\sqrt{a})^2 = a \\ \Leftrightarrow & (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0 \\ \Leftrightarrow & x - \sqrt{a} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{a} = 0 \\ \Leftrightarrow & x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a} && \mathcal{S} = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\} \end{aligned}$$

**Remarques.** 1) Lorsque  $a < 0$ , l'équation  $x^2 = a$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$  car  $x^2 \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On écrit  $\mathcal{S} = \emptyset$ . Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément : cet ensemble est appelé **ensemble vide**. Il est noté  $\emptyset$ .

2)  $x^2 = 0$  équivaut à  $x = 0$ .

3) Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on prendra garde à ne pas confondre l'élément  $x$  de  $\mathbb{R}$  et la partie de  $\mathbb{R}$  qui ne contient que l'élément  $x$ , et qui est notée  $\{x\}$ .

### 3. Quotient nul

**Énoncé :** résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\frac{13-x}{3x-9} = 0$ .

Tout d'abord, le quotient  $\frac{13-x}{3x-9}$  existe *si et seulement si* le dénominateur est non nul,

$$\begin{aligned} \text{c'est-à-dire} \quad & \text{ssi } 3x - 9 \neq 0 \\ & \text{ssi } 3x \neq 9 \\ & \text{ssi } x \neq 3 \end{aligned}$$

Donc 3 ne peut pas être une solution de l'équation.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\frac{13-x}{3x-9} = 0$ , c'est en fait résoudre cette équation dans l'ensemble de

tous les réels sauf 3. Cet ensemble est noté  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

$$\text{Dans } \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad \frac{13-x}{3x-9} = 0 \Leftrightarrow 13-x=0 \Leftrightarrow x=13$$

$$\mathcal{S} = \{13\}$$

**Autre façon de rédiger :**

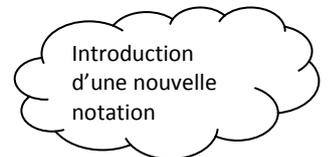
#### Propriété

Soient  $A, B \in \mathbb{R}$ .

Alors  $\frac{A}{B} = 0$  équivaut à  $A = 0$  et  $B \neq 0$ .

$$\text{Dans } \mathbb{R}, \quad \frac{13-x}{3x-9} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 13-x=0 \\ 3x-9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=13 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=13$$

$$\mathcal{S} = \{13\}$$



#### 4. Propriété avec l'égalité de deux quotients

Soient  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ .

Alors  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  équivaut à  $\begin{cases} A \times D = B \times C \\ B \neq 0 \\ D \neq 0 \end{cases}$ .

**Énoncé :** résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\frac{3}{x-1} = \frac{4}{1-2x}$

$$\text{Dans } \mathbb{R}, \frac{3}{x-1} = \frac{4}{1-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(1-2x) = 4(x-1) \\ x-1 \neq 0 \\ 1-2x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-6x = 4x-4 \\ x \neq 1 \\ 2x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x-4x = -4-3 \\ x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10x = -7 \\ x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{10} \\ x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{10}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{7}{10} \right\}$$

#### 5. Recommandation

Il est conseillé de regarder les exercices corrigés en vidéo sur

<http://www.lycee-pierre-bourdan-maths-video.net/-Equations-5->