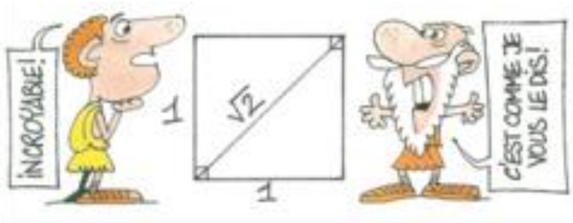
**Activité** $\sqrt{2}$ *est irrationnel !*


Ce problème, les mathématiciens grecs de l'Antiquité se le sont posé. À leur grande surprise, ils se sont rendus compte que $\sqrt{2}$ n'était pas égal à une fraction.




***Hypothèse : supposons que $\sqrt{2}$ soit égal à une fraction $\frac{p}{q}$ irréductible.***

**A.** Que pourrait-on dire alors des deux nombres entiers $p$ et $q$ ?

**B.** Démontrer que l'on aurait $2q^2 = p^2$.

**C.** En particulier $2q^2$ et $p^2$ devraient avoir le même chiffre des unités. Le chiffre des unités de $p$ peut être 0 ou 1 ou 2 ou …ou 9, celui de $q$ aussi. Compléter alors les tableaux suivants :

| Chiffre des unités de $p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chiffres des unités de $p^2$ | | | | | | | | | | |

| Chiffre des unités de $q$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Chiffres des unités de $q^2$ | | | | | | | | | | |
| Chiffres des unités de $2q^2$ | | | | | | | | | | |

**D.** En déduire que $p$ et $q$ seraient divisibles par 5.

**E.** Les nombres $p$ et $q$ seraient-ils premiers entre eux ? Conclure.

**Source :** G. Bonnefond, D. Daviaud et B. Revranche , *Le nouveau Pythagore*, Mathématiques 3[e] , édition Hatier, avril 1999, Paris, p. 114.

**Remarque :** légère modification de ma part à la question D. Initialement la question est la suivante : *en déduire que p devrait se terminer par 0 et que q devrait se terminer par 0 ou 5. Démontrer alors que p et q seraient divisibles par 5.*