Chapitre …

Différents ensembles de nombres

Le cours

1. Les naturels

1.1 Définition

Les entiers naturels, appelés encore *naturels*, désignent les entiers positifs.

1.2 Notation

L'ensemble des naturels est noté $\mathbb{N}$.

Remarques. 1) La lettre $\mathbb{N}$ est la première lettre du mot italien « *naturale* ». On doit cette notation au mathématicien et philosophe italien Peano qui l'utilisa en 1895 dans son second *Formulaire de mathématiques*.

2) « Le nombre 3 appartient à $\mathbb{N}$ » se note « $3 \in \mathbb{N}$ ».

3) « Le nombre 1,26 n'est pas un naturel » se note « $1{,}26 \notin \mathbb{N}$ ».

1.3 Nombres premiers

1.3.1 Définition

Un naturel premier est un naturel qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarques. 1) Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

2) 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 sont les nombres premiers inférieurs à 50.

3) On sait depuis Euclide d'Alexandrie qu'il existe une infinité de nombres premiers.

4) Par le crible d'Ératosthène, on peut écrire tous les nombres premiers inférieurs à une certaine quantité.

1.3.2 Théorème (à admettre)

Tout naturel non premier supérieur à 1 peut s'écrire de manière unique sous la forme d'un produit de nombres premiers. On dit que l'on réalise ainsi *sa décomposition en produit de facteurs premiers*.

Exemple. Le naturel 60 qui n'est pas premier s'écrit : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$.

2. Les entiers

2.1 Définition

Les entiers relatifs, appelés encore *entiers*, désignent les entiers positifs ou négatifs, c'est-à-dire les naturels ou leurs opposés.

2.2 Notation

L'ensemble des entiers est noté $\mathbb{Z}$.

Remarques. **1)** $\mathbb{Z}$ est la première lettre du mot allemand « *zahl* » signifiant « *nombre* ». On doit cette notation au mathématicien allemand Dedekind.

2) On note $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers *non nuls*.

2.3 Inclusion

Tous les naturels sont des entiers. On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ pour signifier que $\mathbb{N}$ est une *partie* de $\mathbb{Z}$.

« $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ » se lit « $\mathbb{N}$ est *inclus* dans $\mathbb{Z}$ ».

3. Les décimaux

3.1 Définition

Les nombres décimaux, appelés encore *décimaux*, sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Remarques. **1)** Un décimal est un nombre qui n'a qu'*un nombre fini de chiffres non nuls* après la virgule.

2) $-$ 32,57 est un décimal car $-32{,}57 = \frac{-3\,257}{100} = \frac{-3\,257}{10^2}$.

3) 6 est un décimal car $6 = \frac{6}{10^0}$.

3.2 Notation

L'ensemble des décimaux est noté $\mathbb{D}$.

3.3 Inclusion

Tout entier a peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^0}$. Donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

4. Les rationnels

4.1 Définition

Les nombres rationnels, appelés encore *rationnels*, sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.

Exemples. Les nombres suivants sont des rationnels : $\frac{-2}{3}$; $\frac{7}{-5}$; $-\frac{9}{13}$.

4.2 Notation

L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

$a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$

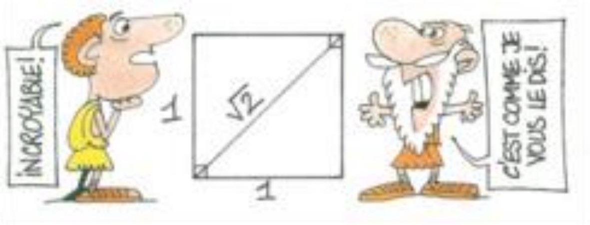
4.3 Inclusion

Tout décimal $\frac{a}{10^n}$ est de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ en prenant $p = a$ et $q = 10^n$. Donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

5. Les réels

5.1 Les irrationnels

Selon Aristote, les pythagoriciens – *disciples de Pythagore* – démontrèrent dans l'Antiquité le fait que $\sqrt{2}$ **ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient de naturels.** $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. **C'est un nombre *irrationnel*.**



© *Le nouveau Pythagore*, Mathématiques 3e,

édition Hatier, avril 1999, Paris, p. 114.

« Les Grecs croyaient avoir défini tous les nombres – sans le dire, et sans le savoir – et, la découverte des irrationnelles par les pythagoriciens fut d'abord un vrai scandale avant de se muer en un morceau de bravoure de l'histoire des Mathématiques : le scoliaste anonyme qui rapporte la chose sur le mode épique déclare que "*selon la légende, la personne qui l'aurait dévoilée aurait péri dans un naufrage".* Selon Proclus[1], Euclide aurait commenté la nouvelle en ces termes : " *les auteurs de la légende ont voulu dire que ce qui est irrationnel et privé de forme doit demeurer caché, que si quelque âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors elle est entraînée dans la mer du devenir "*[2].

Ces choses nouvelles, on les dénomme donc irrationnelles – depuis le grec *alogon* – mot porteur du double sens (est-il vraiment double ?) : à la fois *" privé d'aune, de mesure commune "*, et qui *" n'est pas de nature à assurer la cohérence du discours "*. »[3]

π est lui-aussi un irrationnel car on ne peut pas l'écrire sous la forme d'un quotient d'entiers.

On sait démontrer que $\sqrt{n}$ est irrationnel lorsque n est un naturel qui n'est pas le carré d'un entier. Ainsi $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ sont des irrationnels.

[1] Proclus (412 – 485), philosophe grec bien postérieur à Euclide, est l'un des maîtres de l'école néo-platonicienne.

[2] Dahan-Dalmedico et Peiffer J., *Routes et Dédales*, Seuil Editeur Paris Collection Point Sciences, p. 158.

[3] Extrait du livre *Quadrature du cercle. Fractions continues et autres contes* de M. Serfati, brochure A.P.M.E.P. n°86 – 1992.

5.2 L'ensemble des réels

5.2.1 Définition

Les rationnels et les irrationnels constituent l'ensemble des réels, noté $\mathbb{R}$.

Remarques. 1) Les réels sont donc partagés en deux *parties disjointes* : les rationnels et les irrationnels.

2) Le terme *« réel »* (*« real »* en allemand) fut utilisé par le mathématicien Cantor en 1883 et la notation $\mathbb{R}$, on la doit encore à Dedekind.

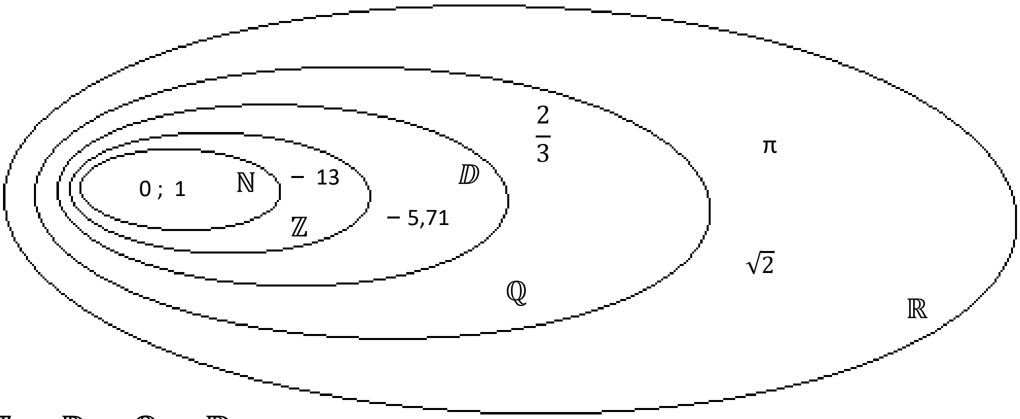
5.2.2 Inclusion

D'après la définition précédente, on en conclut que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

5.2.3 Représentation de $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ peut être représenté par une droite graduée. Il est l'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite sur laquelle est choisi un repère (O ; I).

6. Bilan des inclusions



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$